Отчет Фроленкова Д.А. за 2013 г.

Задача № 1. *Исследование гипотезы Зарембы.*

Гипотеза Зарембы (1971) утверждает, что каждое натуральное число d представимо в виде знаменателя (континуанта) конечной цепной дроби $\frac{b}{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$, все неполные частные которой $d_1, d_2, \dots, d_k$ ограничены сверху некоторой абсолютной константой A. С.Заремба предположил[1], что значения $A = 5$ достаточно для справедливости его гипотезы. К такому предположению он пришел в результате исследования псевдослучайных чисел. Несколько раньше, в 50-е годы прошлого века, С.Бахвалов, и Н.М.Коробов, рассматривая вопросы приближенного интегрирования, также пришли к аналогичной гипотезе. Исследованием гипотезы Зарембы в разное время занимались такие ученые как Д.Хенсли,Т.Кузик, И.Гуд, Н,Г,Мощевитин, Ж.Бургейн. Подробный обзор результатов, касающихся гипотезы Зарембы, можно найти в[2]

Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{N}$ – произвольный конечный алфавит (всюду далее $|\mathcal{A}| \geqslant 2$) и $\delta_{\mathcal{A}}$ - хаусдорфова размерность множества $\mathfrak{C}_{\mathcal{A}} = \{[d_1, \dots, d_j, \dots] : d_j \in \mathcal{A},\ j = 1, \dots\}$. Недавно (2011) Ж.Бургейн и А.Конторович[3] доказали ряд новых теорем по этой проблеме. Самая простая из них имеет вид

Теорема 1. *Для произвольного алфавита* $\mathcal{A}$, *такого что*

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{5}{312} = 0,983914\dots, \tag{0.1}$$

справедливо неравенство ("положительная пропорция")

$$\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) \gg N. \tag{0.2}$$

Неравенству (0.1) *удовлетворяет алфавит* $\{1, 2, \dots, A-1, A\}$ *при* $A = 50$.

Улучшая метод Бургейна –Конторовича мы в совместной статье с И.Д.Каном[4] доказали следующее утверждение

Теорема 2. *Для произвольного алфавита* $\mathcal{A}$, *такого что*

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{5}{\sqrt{369} + 23} = 0,8815\dots, \tag{0.3}$$

имеет место неравенство (0.2). *Неравенству* (0.3) *удовлетворяют алфавиты* $\{1, 2, \dots, 7\}$ *и* $\{1, 2, \dots, 6, 8\}$.

Отметим, что доказательство теорем 1 и 2 существенным образом опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $K, X, Y \geqslant 1$ *действительные числа,* q *–натуральное и пусть вектора* $\eta = (x, y)^t, \eta' = (u, v)^t \in \mathbb{Z}^2$ *такие что*

$$|\eta| \asymp \frac{X}{Y}, |\eta'| \asymp X, (x, y) = 1, (u, v) = 1.$$

[1] S.K. Zaremba. La méthode des "bons treillis"pour le calcul des intégerales multiples. In Applications of number theory to numerical analysis, pages 39-119. Academic Press, New York, 1972.

[2] N.G. Moshchevitin. On some open problems in diophantine approximation, preprint available at arXiv:1202.4539v4

[3] J. Bourgain, A. Kontorovich. On Zaremba's conjecture, preprint available at arXiv:1107.3776(2011)

[4] И.Д. Кан, Д.А. Фроленков. Усиление теоремы Бургейна-Конторовича. Изв. Ран.

Если выполнено соотношение
$$(qK)^{\frac{13}{5}} < Y < X, \tag{0.4}$$
то
$$\#\left\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| \|\gamma\| \asymp Y, |\gamma\eta - \eta'| < \frac{X}{K}, \gamma\eta \equiv \eta' \pmod q\right\} \ll \frac{Y^2}{(qK)^2}.$$

Доказательство леммы 1, приведенное в статье[3], опирается на работу[5], где доказываются утверждения, схожие с леммой 1. При этом доказательство является довольно сложным, ввиду использования методов спектральной теории автоморфных форм. В статье[4] мы на основе работы Е.В. Подсыпанина[6] (в которой используются оценки сумм Клоостермана) доказали утверждение леммы 1 при условии $K^4q^6 < Y < X$. Однако, использование этого варианта леммы 1 позволяет получить лишь следующий результат.

Теорема 3. *Для произвольного алфавита $\mathcal{A}$, такого что*
$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{1}{6 + 2\sqrt{10}} = 0,9188\ldots, \tag{0.5}$$
(0.2). *Неравенству* (0.5) *удовлетворяют алфавиты* $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Основной сложностью на пути улучшения результата $A = 7$ является необходимость применения леммы 1 или ее аналога. Однако, стоит отметить, что одной из основных идей метода Бургейна –Конторовича является конструирование специального множества матриц Ω_N. Этот факт совершенно не учитывается в лемме 1. Использование свойств матриц из множества Ω_N и свойств стандартных цепных дробей позволило нам в совместной статье с И.Д.Каном[7] избежать необходимости применения леммы 1. Также важную роль в получении нового результата сыграло и некоторое тривиальное видоизменение кругового метода, а именно, замена интеграла по дугам на частичные суммы. Вместо того, чтобы оценивать следующие величины

$$\frac{1}{N}\sum_{0\leqslant a\leqslant q\leqslant X}^{*}\int\limits_{|K|\leqslant Y}\left|S_N(\frac{a}{q} + \frac{K}{N})\right|^2 dK, \tag{0.6}$$

мы сводим задачу к оценке сумм вида
$$\frac{1}{TN}\sum_{0\leqslant a\leqslant q\leqslant X}^{*}\sum_{|l|\leqslant TY}\left|S_N(\frac{a}{q} + \frac{l}{TN})\right|^2. \tag{0.7}$$

Эти две основные идеи, объединенные с другими стандартными методами, позволили доказать следующее утверждение

[5] J. Bourgain, A. Kontorovich, P.Sarnak. Sector estimates for hyperbolic isometries. GAFA, 20(5):1175-1200,2010.

[6] Е.В. Подсыпанин.Распределение целых точек на детерминированной поверхности. Исследования по теории чисел 6, Зап. научн.сем. ЛОМИ, 93,изд-во Наука, ленинград.отд., Л.,1980, 30-40.

[7]И.Д. Кан, Д.А. Фроленков. Frolenkov D.A., Kan I.D., A reinforcement of the Bourgain-Kontorovich's theorem II, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 28 p.

Теорема 4. *Для произвольного алфавита $\mathcal{A}$, такого что*

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{1}{6} = 0,8333\ldots, \tag{0.8}$$

имеет место неравенство (0.2). *Неравенству* (0.8) *удовлетворяют алфавиты* $\{1,2,\ldots,5\}$.

Задача № 2. *Аддитивная проблема делителей.*
Для натуральных k,m,n положим $d_k(n) = \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k=n} 1$

$$D_m^k(P) = \sum_{1\leqslant n\leqslant P/m} d_k(n)d_2(mn+1).$$

Нахождение асимптотических формул для величин $D_m^k(P)$ и называется аддитивной проблемой делителей. Обозначим через $E_m^k(P)$ остаточный член в асимптотической формуле для $D_m^k(P)$. Ж.-М. Дезуе и Г.Иванец,[8] и независимо от них Н.В.Кузнецов,[9] используя спектральные методы доказали, что $E_1^2(P) \ll P^{2/3+\epsilon}$. Р.Хис-Браун[10] доказал, что $E_1^3(P) \ll P^{1-1/102+\epsilon}$. В статье В.А.Быковского и А.И.Виноградова[11] сформулирован следующий результат

$$E_1^k(P) \ll P^{1-\delta_k+\epsilon},\ \text{где}\ \delta_3 = \frac{1}{9},\ \delta_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{2k},\ \text{при} k = 4,5;$$
$$\delta_k = \frac{1}{2k},\ \text{при}\ k > 5.$$

Однако данная статья содержит лишь набросок доказательства этого утверждения, причем не исключено и наличие неточностей, влияющих на окончательный результат.

Предполагается получить полное доказательство теоремы Быковского –Виноградова с учетом новых результатов, появившихся в спектральной теории с 1987г. На данный момент нами уже доказано, что $E_m^2(P) \ll \frac{P^{2/3+\epsilon}}{m^{1/3}} + P^{1/2+\epsilon}$. Эта оценка улучшает теорему В.Дьюка, Д.Фридландера, Г.Иванца[12] $E_m^2(P) \ll \frac{P^{8/9+\epsilon}}{m^{5/9}}$.

Опубликованные и поданные в печать работы

1. Frolenkov D.A., K.Soundararajan A generalization of the Polya -Vinogradov inequality, Ramanujan journal vol 31, iss.3, 2013, p. 271-279.

2. Кан И.Д., Фроленков Д.А., Усиление теоремы Бургейна-Конторовича, Изв. РАН. Сер. матем., 64 стр. (принята).

3. Frolenkov D.A., Kan I.D., A reinforcement of the Bourgain-Kontorovich's theorem II, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 28 p. (подана)

[8] J.M. Deshouillers, H.Iwaniec.An additive divisor problem, J.London. Math. Soc., 1982, 26(2), pp.1-14.

[9] Н.В. Кузнецов.Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна-Маасса. Зап. научн.сем. ЛОМИ, 129(1), с.43-84.

[10] D.R.Heath-Brown.The divisor function $d_3(n)$ in arithmetic progressions, Acta Arithmetica., 1986, 47(1), pp.29-56.

[11] В.А.Быковский, А.И.Виноградов.Неоднородные свертки. Зап. научн.сем. ЛОМИ, 129(1),1987, с.43-84.

[12] W. Duke, J.B.Friedlander, H.Iwaniec.A quadratic divisor problem, Inventiones Math., 1994, 115, pp.209-217.

Также был подготовлен следующий препринт

1. Frolenkov D.A., Kan I.D., A reinforcement of the Bourgain-Kontorovich's theorem II, 57 p., preprint, available at arXiv:1303.3968

Работа в научных центрах и международных группах

1. Работа в Хабаровском отделении Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН (март-май 2013 г.)